Pismeni ispit iz Analize III, 01.11.2013.
ispit pisati isključivo hemijskom olovkom

1. (a) Ispitati neprekidnost funkcije $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 2, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

(b) Pokazati da limes $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ne postoji.

2. Izračunati $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ gdje je $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq x^2+y^2 \leq 2x\}$.

3. Izračunati površinu dijela cilindra $x^2+y^2=y$ ograničenog površima $z=0$ i $z=1-x^2-y^2$.

4. Izračunati integral $\displaystyle\iint\limits_S z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ gdje je S površ koja ograničava tijelo ograničeno površima $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $x+z=a$, $z=0$ $(a>0)$ sa izabranom spoljnom stranom.

Pismeni ispit iz Analize III, 01.11.2013.
ispit pisati isključivo hemijskom olovkom

1. (a) Ispitati neprekidnost funkcije $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 2, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

(b) Pokazati da limes $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ne postoji.

2. Izračunati $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ gdje je $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq x^2+y^2 \leq 2x\}$.

3. Izračunati površinu dijela cilindra $x^2+y^2=y$ ograničenog površima $z=0$ i $z=1-x^2-y^2$.

4. Izračunati integral $\displaystyle\iint\limits_S z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ gdje je S površ koja ograničava tijelo ograničeno površima $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $x+z=a$, $z=0$ $(a>0)$ sa izabranom spoljnom stranom.

(#) Ispitati neprekidnost f-je

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 2, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

R:

Jedina sumnjiva tačka u kojoj f-ja možda ima prekid je tačka $(0,0)$. F-ja f će biti neprekidna u tački $(0,0)$ akko $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.

Prema definiciji f-je $f(0,0)=2$. Izračunajmo još $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Primijetimo da je

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} =$$

$$= \frac{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{x^2+y^2+1-1} = \sqrt{x^2+y^2+1}+1$$

Prema tome

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)=2$$

Data f-ja je neprekidna za $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$.

(#) Pokazati da limes

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

ne postoji.

Rj: Prisjetimo se sfernih koordinata
$$x=\rho\sin\varphi\cos\theta$$
$$y=\rho\sin\varphi\sin\theta$$
$$z=\rho\cos\varphi$$

Uvođenjem sfernih koordinata imamo $x^2+y^2+z^2=\rho^2$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\rho\sin\varphi\cos\theta}{\rho} = \sin\varphi\cos\theta$$

i primjetimo da $\rho\to 0$ kada $(x,y,z)\to(0,0,0)$.
Tački $(0,0,0)$ ćemo se približavati duž dvije linije: duž linije L_1 za koju je $\varphi=\frac{\pi}{4}$ i $\theta=\frac{\pi}{4}$ i duž linije L_2 za koju je $\varphi=\frac{\pi}{2}$ i $\theta=\frac{\pi}{4}$.

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \lim_{r\to 0} \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \lim_{r\to 0} \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4} = 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Kako smo dobili dvije različite vrijednosti prilikom približavanja tački $(0,0,0)$ duž dvije različite linije, to dati limes ne postoji.

Izračunati integral $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ gdje je

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\le x^2+y^2\le 2x\}.$$

Rj.

$x=x^2+y^2$

$x^2-x+y^2=0$

$x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+y^2=\frac{1}{4}$

$(x-\frac{1}{2})^2+y^2=(\frac{1}{2})^2$

$x^2+y^2=2x$

$x^2-2x+y^2=0$

$x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2+y^2=1^2$

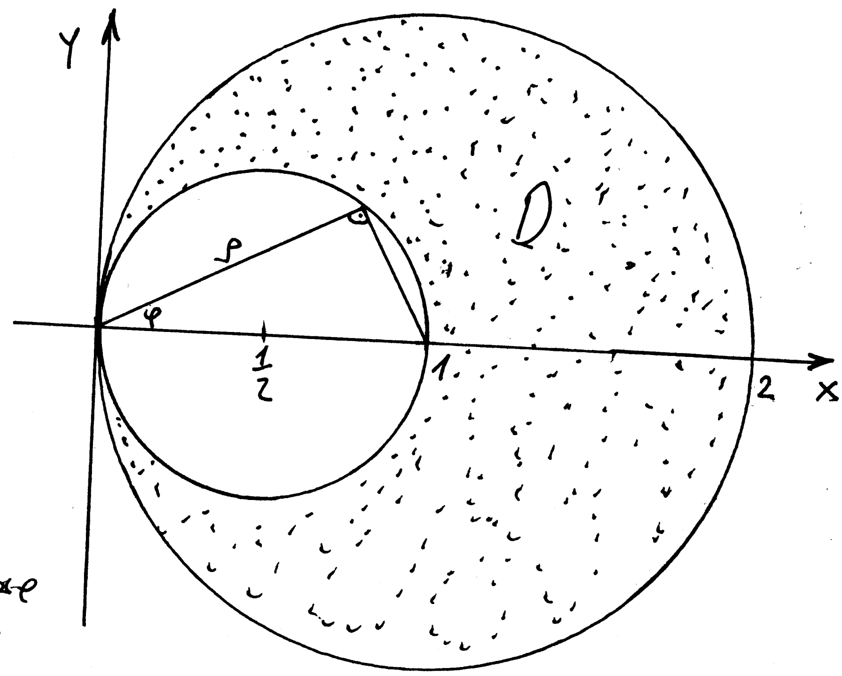
$(x-1)^2+y^2=1$

$\cos\varphi=\frac{\rho}{1}$

$\rho=\cos\varphi$

$\cos\varphi=\frac{\rho}{2}$

Skicirajmo oblast D.



Ako uvedeno polarne koordinate

$x=\rho\cos\varphi$

$y=\rho\sin\varphi$

$dx\,dy=\rho\,d\rho\,d\varphi$

$D \xrightarrow{\text{transfor.}} D'$

unutrašnjost prvog kruga možemo opisati sa $\begin{cases}0\le\rho\le\cos\varphi\\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$

Iz čega nije teško zaključiti da je $D':\begin{cases}\cos\varphi\le\rho\le 2\cos\varphi\\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$

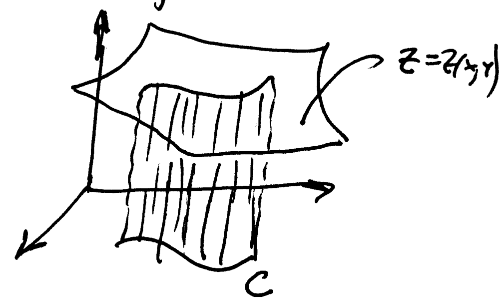
Kako je $x^2+y^2=\rho^2$ sad imamo

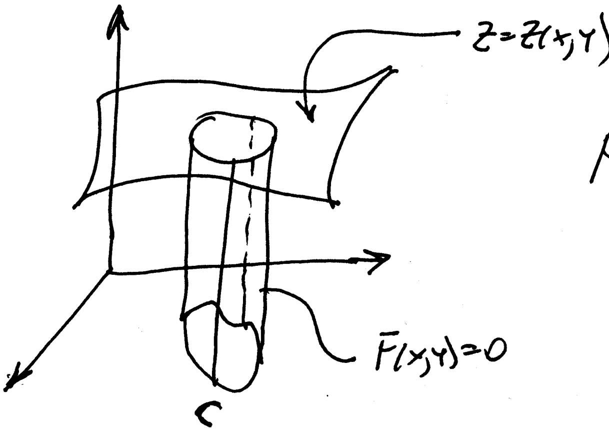
$$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=\left|\begin{matrix}\text{uvodimo}\\ \text{polarne}\\ \text{koordinate}\end{matrix}\right|=\iint\limits_{D'}\rho\rho\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}\rho^2\,d\rho=\frac{7}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\,d\varphi$$

$$=\frac{7}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)\,d(\sin\varphi)=\dots=\frac{28}{9}$$

(#) Izračunati površinu dijela cilindra $x^2+y^2=y$ ograničenog površima $z=0$ i $z=1-x^2-y^2$.

Rj. Površinu dijela cilindra (misli se na dio omotača cilindra) ćemo izračunati pomoću krivoliniskog integrala prve vrste. Prisjetimo se

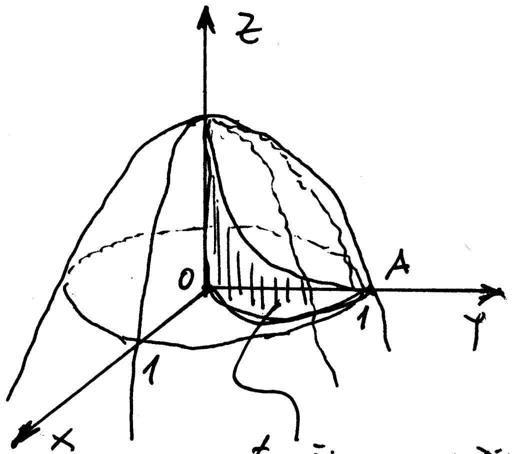




$$P=\int_C z(x,y)\,ds$$

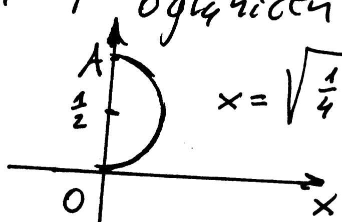
gdje je c kriva koja pripada ravni xOy (ili $c:\begin{cases}F(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$)

Ako skiciramo date površi imamo otprilike ovakvu sliku:



tražimo površinu ovog dijela cilindra.

S obzirom na simetralu cilindra u odnosu na yOz, dovoljno je posmatrati dio cilindra koji je u prvom oktantu i ograničen je odozdo sa



$x=\sqrt{\frac{1}{4}-(y-\frac{1}{2})^2}$

a odozgo sa paraboloidom $z=1-x^2-y^2$.

$$x^2+y^2-y=0$$
$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

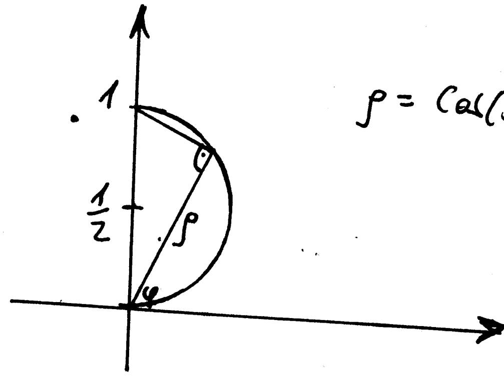
Dio luka $\widehat{OA}$ možemo parametrizirati na sljedeći način $\widehat{OA}:\begin{cases}x=\frac{1}{2}\cos t\\ y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin t\\ -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$

__I način__:
Sad imamo

$$P=2\int_{\widehat{OA}}(1-x^2-y^2)\,ds \overset{\text{ZA VJEŽBU}}{=} \ldots = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}(1-\sin t)\,\frac{1}{2}\,dt=\ldots=\frac{\pi}{2}$$

II način: (teži način)

Ako dio kruga



$$\cos(90^\circ-\varphi)=\frac{\rho}{1}$$

$$\rho=\cos(90^\circ-\varphi)=\cos 90^\circ\cos\varphi+\sin 90^\circ\sin\varphi$$
$$=\sin\varphi$$

parametrizujemo na sljedeći način
$$x=\sin\varphi\cos\varphi$$
$$y=\sin^2\varphi$$
$$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$

$$ds=\sqrt{(\sin\varphi\cos\varphi)'^{\,2}_{\varphi}+(\sin^2\varphi)'^{\,2}_{\varphi}}\,d\varphi$$

$$(\sin\varphi\cos\varphi)'_{\varphi}=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi=\cos 2\varphi$$
$$(\sin^2\varphi)'_{\varphi}=2\sin\varphi\cos\varphi=\sin 2\varphi$$

$$ds=d\varphi$$

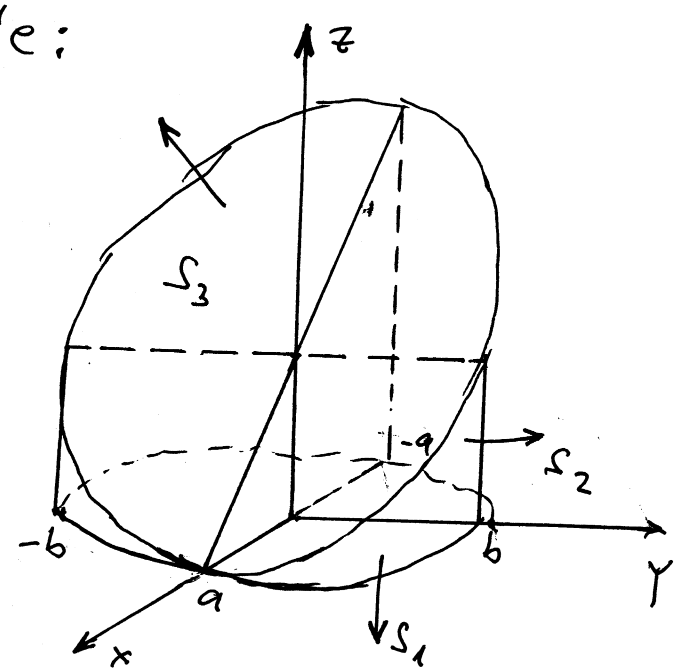
$$P=2\int_{\overset{\frown}{OA}}(1-x^2-y^2)\,ds=2\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2\varphi\cos^2\varphi-\sin^4\varphi)\,d\varphi$$

$$\int_0^{\pi/2}d\varphi=\frac{\pi}{2},\quad \int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi=\ldots=\frac{\pi}{16},\quad \int_0^{\pi/2}\sin^4\varphi\,d\varphi=\ldots=\frac{3\pi}{16}$$

$$P=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{16}-\frac{3\pi}{16}\right)=2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$$

Izračunati integral $\iint_S z^2\,dx\,dy$ gdje je S površ koja ograničava tijelo ograničeno površima $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $x+z=a$, $z=0$ $(a>0)$ sa izabranom spoljnom stranom.

Rj: U ravni $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ predstavlja elipsu, dok je u prostoru to cilindar. Površ $x+z=a$ predstavlja ravan koja x i z osu siječe u tački a. Ako pokušamo skicirati datu površ S imamo sljedeće:



Prema tome površ S je unija tri površi S_1 (površ elipse u ravni), S_2 (dio cilindra sa izvodnicama paralelnim z-osi) i S_3 (dio ravni $x+z=a$) pa je

$$\iint_S z^2\,dx\,dy=\iint_{S_1} z^2\,dx\,dy+\iint_{S_2} z^2\,dx\,dy+\iint_{S_3} z^2\,dx\,dy$$

$$\iint_{S_1} z^2\,dx\,dy=\left|\begin{array}{l}\text{u } S_1 \text{ je } z=0\\ \text{i } \cos\gamma=0\end{array}\right|=0$$

$$\iint_{S_2} z^2\,dx\,dy=\left|\begin{array}{l}S_2 \text{ se projektuje}\\ \text{na krivu u } xOy \text{ ravni}\end{array}\right|=0$$

Primjetimo se:
Kada računamo površinski integral druge vrste
- ugao koji vektor normale zaklapa sa z-osom
- ortogonalnu projekciju površi

$$\iint_{S_3} z^2\,dx\,dy = \left|\begin{array}{l} \text{ortogonalna projekcija na } xOy \text{ ravan je unutrašnjost elipse} \\ D=\left\{(x,y) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\} \\ \text{Ako uvedemo pooopštene polarne koordinate} \\ \begin{array}{l} x=a\rho\cos\varphi \\ y=b\rho\sin\varphi \\ |J|=ab\rho \end{array} \quad D \xrightarrow{\text{transformiše}} D': \begin{cases} 0\le\rho\le 1 \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{cases} \\ \cos\gamma>0 \end{array}\right|$$

$$= +\iint_D (a-x)^2\,dx\,dy = \left|\begin{array}{c}\text{pooopštene} \\ \text{polarne} \\ \text{koordinate}\end{array}\right| = \iint_{D'} (a-a\rho\cos\varphi)^2\,ab\rho\,d\varphi\,d\rho$$

$$= a^3 b\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1-\rho\cos\varphi)^2\rho\,d\rho = \overset{\text{za vježbu}}{\ldots} = \frac{5}{4}\pi a^3 b$$